Tendenzen der Geometriedidaktik

Michael Neubrand

Bildungswissenschaftliche Hochschule Flensburg - Universität

Schon immer hat die Geometrie die Didaktiker wegen ihrer Vielschichtigkeit und ihres Aspektereichtums fasziniert. In der neueren Geometrie-Didaktik wird diese „Öffnung der Perspektiven" gewissermaßen zum Programm: Die Realisierung der Komplexität geometrischer Inhalte und Tätigkeiten, die Erweiterung des theoretischen Hintergrunds durch Einbeziehung des Gebrauchs von Geometrie, die Anerkennung des allgemeinbildenden Gehalts, die Beachtung unterschiedlicher Auffassungen von Geometrie sind dafür Stichworte. Um die großen Tendenzen der Geometrie-Didaktik in den letzten ca. 20 Jahren anschaulich werden zu lassen, sind exemplarische Betrachtungen von Änderungen auf einer Schulbuchseite, sowie Bemerkungen zum Konzept des Open Approach im japanischen Mathematikunterricht eingefügt.

Motto

Geometry occupies a specific position among other branches of mathematics and among all other disciplines because of its unique character, consisting of the union of logic, imagination and practice. Geometry in its essence *is* this union.

(ALEXANDROV 1994, p 365)

1. Einleitung: Zur Vielfältigkeit der Geometrie in der Schule

Geometrie ist ein äußerst breites, vielfältiges Gebiet, facettenreicher wohl als die meisten anderen Teilgebiete der Schulmathematik. Es gibt nämlich in der Geometrie in der Schule

- viele unterschiedliche Tätigkeiten, die Schülerinnen und Schüler ausführen können: Zeichnen, berechnen, beweisen, messen, basteln, ... ,
- durchaus gegenläufige Absichten, unter denen ein bestimmter Stoff behandelt werden kann: Eine Figur darstellen, eine Figur analysieren, logische Begründungen geben, Beobachtungen machen und ordnen, ... ,

- unterschiedlichste Verknüpfungsmöglichkeiten zur Realität: Bilder, Modelle, Maschinen, Puzzles, Formen, ... ,
- eine breite Palette geistiger Aktivitäten, die erforderlich sein können: Schauen, erkennen, Probleme lösen, planen und abarbeiten, ...,
- sogar grundsätzlich verschiedene Auffassungen darüber, wozu dieses Stoffgebiet überhaupt dienen kann: Zur Erschließung der räumlichen Struktur der Umwelt, zur Einübung in eine abstrakte mathematische Theorie, zur geistigen Schulung, ... ,
- usw. .

Zu dieser leicht noch weiter ausdehnbaren Vielfalt von Aspekten - vgl. z.B. VOLLRATH (1981) für einen Aufschluß des gesamten Feldes und NEUBRAND (1991) und (1993) mit dem Versuch einer Systematisierung - kommt noch eine eigentümliche Diskrepanz zwischen der Bedeutung der Geometrie in der Schule und der Bedeutung von Geometrie als Teilgebiet der mathematischen Wissenschaft. Einerseits ist nämlich die elementare Geometrie der Ebene und des Raumes sicher kein aktuelles Forschungsgebiet der Mathematik (mehr). Andererseits durchdringen geometrische Denkweisen und visuelle Arbeitstechniken die ganze Mathematik, also Forschung und Lehre und Lernen, sobald man weniger die Ergebnisse als die Tätigkeit des Mathematik - Treibens betrachtet. Ohne eine reichhaltige geometrische Vorstellung ist kaum Kreativität in der Mathematik denkbar. Dies gilt sogar in besonderem Maße in der durch den Einfluß von Computern visuell geprägten Umwelt unsrer Schülerinnen und Schüler. Erst recht ist nun eine reflektierte Anschauung, eine entwickelte „geometrische Grammatik", wie es BAUERSFELD (1992) ausdrückte, nötig.

Aber welche Paradoxie für den Status der Schulgeometrie: Man erwartet sich offenbar - überspitzt ausgedrückt - von einer im Hinblick auf die mathematische Ergebnisgewinnung sozusagen "toten" mathematischen Teildisziplin eine besonders "lebendige" Einführung in mathematisches Denken. Die Frage nach der Bedeutung der Geometrie ist mithin eine didaktische, nicht eine mathematische; und "didaktisch" ist hier im umfassenden Sinne zu verstehen: Von Inhaltsanalysen über Lehrmethoden bis zum Lernverhalten.

Was aber sollen dann bei einer offenbar derart komplexen Ausgangslage Wandel, Weiterentwicklung, Trends, ... bedeuten? Wie soll man sie faßbar machen? Kann man sie überhaupt erkennen? Die Grundthese zur Bearbeitung dieses Problems ist gewissermaßen selbstbezüglich zu den geschilderten Beobachtungen: Eben in der zunehmenden Anerkennung und Realisierung der großen Komplexität des Feldes Geometrie - Geometriedidaktik - Geometrieunterricht liegt der Trend, der die neueren Untersuchungen zu diesen Gebieten beherrscht. (Für eine systematischere Darstellung, auch für mehr Literaturbelege, als es in einem Vortrag möglich ist, siehe GRAUMANN ET AL. 1996; für die internationale Perspektive siehe VILLANI ET AL. 1998.)

2. Ein Orientierungsbeispiel: Änderungen an einer Schulbuchseite von 1969 zu 1995

Um zunächst eine Vorstellung davon zu erzeugen, wie unterschwellig und schwer erkennbar Änderungen im Geometrieunterricht ablaufen können, und wie sehr sie nur durch die nachträgliche Interpretation erkannt werden, soll zunächst die Behandlung ein und desselben Themas in einer in Deutschland weit verbreiteten Schulbuchreihe, nämlich dem „Lambacher-Schweizer", über die verschiedenen Bearbeitungen hinweg verglichen werden. Diese Schulbuchreihe mit langer Tradition gilt allgemein als schnellen modischen Trendwechseln eher abgeneigt. Umso besser ist sie also geeignet, Tiefenströmungen im Wandel der Geometriedidaktik aufzufinden.

Das Thema „Kreis und Tangente" wird bei den drei betrachteten Schulbuchauflagen jeweils etwa in der Mitte des gesamten Geometrie-Lehrgangs im 8. Schuljahr behandelt. Alle Auflagen sind nach dem üblichen Schema aufgebaut: Auf den erläuternden Text und die Formulierung der zentralen Ergebnisse folgt eine Reihe von Aufgaben. Zunächst Ausschnitte aus den jeweiligen erläuternden Texten:

<u>LS-69:</u> <u>Lambacher Schweizer, Geometrie 1, Stuttgart: Klett 1969</u> (Zitiert nach der 3. Auflage von 1977; ohne die Hervorhebungen im Text und ohne Figuren wiedergegeben).

Zeichnet man zum Radius MB eines Kreises die Senkrechte t durch B, so liegt jeder andere Punkt A von t außerhalb des Kreises (warum?).

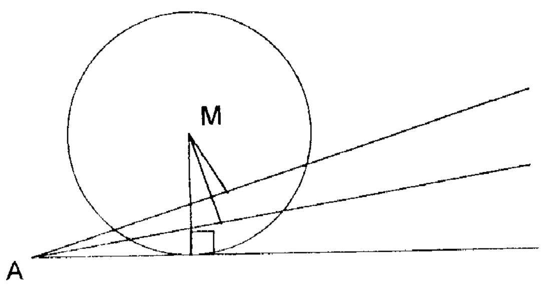
Definition 1: Eine Gerade, die mit einem Kreis genau einen Punkt B gemeinsam hat, heißt Tangente des Kreises. B ist der Berührpunkt, MB der Berührhalbmesser.

Satz 5: Eine Tangente steht senkrecht auf ihrem Berührhalbmesser. (Fig. 85.3)

Satz 6: Eine Gerade schneidet, berührt, meidet einen Kreis mit Radius r, je nachdem ihr Abstand vom Kreismittelpunkt kleiner, gleich, größer als r ist.

Satz 7: Legt man von einem Punkt außerhalb die Tangenten an den Kreis, so sind ihre Abschnitte zwischen dem Schnittpunkt und dem Berührpunkt gleich lang.

Andere Erzeugung der Tangente: Bewegt man eine Sekante g so, daß ihre Schnittpunkte immer näher zusammenrücken (Fig. 85.5,6,7)), so ist die Grenzlage dieser Sekanten eine Tangente.



Grundaufgabe: Zeichne von einem Punkt P außerhalb eines Kreises (M;r) die Tangenten an den Kreis.

Konstruktion (Fig. 85.4): Zeichne MP und den Kreis über MP als Durchmesser (Thaleskreis). Er schneidet den Kreis (M;r) in den Berührpunkten B und B'. Zeichne (BP) und (B'P).

(MN - Hinweise zu den Figuren: 85.3 zeigt einen Kreis mit Tangente, Berührpunkt und einer Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt des Kreises und einem weiteren Punkt auf der Tangente. 85.4 ist das übliche Bild der Tangentenkonstruktion mittels des Thaleskreises. Die Figuren 85.5 bis .7 zeigen jeweils eine Serie von Geraden, die sich um einen Punkt A außerhalb des Kreises bzw. um einen Punkt B auf dem Kreis drehen bzw. senkrecht zu einem Radius parallel verschoben werden, bis in jeder der drei Figuren aus den Sekanten eine Tangente wird; der erstgenannte Fall ist hier skizziert.)

LS-83: Lambacher Schweizer: Geometrie 1, Klett, Stuttgart 1983 (Zitiert wird aus der ersten Auflage 1983, Druck 1984; Hervorhebungen im Text nicht übernommen; ohne Figuren)

Beim Hammerwerfen (Fig. 122.1) dreht sich der Werfer mit der an einem Draht befestigten Kugel so rasch wie möglich und läßt diese dann in einem geeigneten Augenblick los. Wann muß der Werfer loslassen, damit die Kugel in die vorgegebene Richtung fliegt?

Ein Kreis und eine Gerade können 0, 1 oder 2 Punkte gemeinsam haben (Fig. 122.2), andere Möglichkeiten gibt es nicht. Bei 2 gemeinsamen Punkten nennt man die Gerade eine Sekante (Schneidende); gibt es nur 1 gemeinsamen Punkt B, so heißt die Gerade Tangente (Berührende) und B ihr Berührpunkt.

Satz: Eine Gerade t durch einen Punkt B auf k(M; r) ist genau dann Tangente, wenn $t \perp MB$ ist, d.h., wenn die Gerade und der dazugehörige Berührradius orthogonal sind.

Diese Eigenschaft ermöglicht die Konstruktion der Tangente

a) parallel zu einer gegebenen Geraden g (Fig. 122.3): Konstruiere die Orthogonale zu g durch M; sie schneidet K in B und B_1. Die Parallelen zu g durch B bzw. B_1 sind die gesuchten Tangenten.

b) durch einen gegebenen Punkt P im Kreisäußeren (Fig. 122.4): Konstruiere über PM den sogenannten Thaleskreis; er schneidet k in B und B_1. (PB) und (PB_1) sind die gesuchten Tangenten.

(MN - Hinweise zu den Figuren: 122.1 zeigt das Foto eines Hammerwerfers, der noch in der Drehung befindlich ist. In Fig. 122.2 sind die möglichen Lagen von Kreis und Gerade zueinander aufgezeigt. Figuren 122.3 und 122.4 zeigen die im Lehrtext genannten Konstruktionen der Tangenten.)

LS-95: Lambacher Schweizer 7, Klett, Stuttgart 1995 (Zitiert wird aus der 1. Auflage 1995, Ausgabe Baden-Württemberg; ohne Figuren und Hervorhebungen im Text)

(MN - Das Thema „Kreis und Tangente" kommt nun nicht mehr als eigenständiger Paragraph vor; die vorgenannten Inhalte finden sich auf Seite 36 im Kapitel „Abstand eines Punktes von einer Geraden" bzw. auf Seite 113 im Kapitel „Satz des Thales".)

S.36:

Zeichnet man in einem Punkt B eines Kreises die Orthogonale t zum Radius MB, dann hat t mit dem Kreis nur den Punkt B gemeinsam: für jeden anderen Punkt A auf t ist nämlich $\overline{MA} > \overline{MB}$. Eine solche Gerade, die mit dem Kreis nur einen einzigen Punkt gemeinsam hat, heißt Tangente an den Kreis. Für die gilt also:

Die Tangente in einem Punkt B an einen Kreis mit dem Mittelpunkt M ist orthogonal zum Berührradius MB.

Beispiel 3 (Konstruktion der Tangente): Um in einem gegebenen Punkt B eines Kreises mit dem Mittelpunkt M die Tangente zu konstruieren, verbinden wir B mit M und zeichnen in B die Orthogonale zu BM. Diese Orthogonale ist die Tangente des Kreises im Punkt B.

S.113:

Beispiel 3 (Konstruktion von Kreistangenten): Gegeben ist eine Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sowie ein Punkt P außerhalb des Kreises (Fig.2). Gesucht sind die Tangenten an k durch P.

Da Tangente und Berührradius zueinander senkrecht sind, müssen die Berührpunkte auf dem Thaleskreis über PM liegen. Man konstruiert also den Thaleskreis über PM; er schneidet k in B_1 und B_2. Die Geraden durch P und B_1 bzw. durch P und B_2 sind die gesuchten Tangenten.

(MN - Hinweise: Fig. 2 zeigt die beschriebene Thaleskreis-Konstruktion.)

Auf dem ersten Blick erscheinen die Unterschiede zwischen den Lehrbuchdarstellungen eher marginal. Insbesondere sind keine Urteile abzugeben, die eine oder die andere Ausgabe sei besser oder schlechter. Ein solches Urteil müßte ja auf einer zeitlich konstanten Bewertungsbasis erfolgen; eben solche zeitlichen Änderungen aber sind es, die wir beschreiben wollen. Beim näheren Hinsehen fallen dann allerdings doch drei grundsätzliche Perspektive-Verlagerungen auf:

a) Während LS-69 den Tangentenbegriff vollständig auf den innermathematischen Kontext des Schneidens von Kreis und Gerade beschränkt, bringt LS-83 mit dem Beispiel des Hammerwerfens auch eine physikalische Idee ins Spiel: Tangenten entstehen als Flugbahnen des Hammers. Inwieweit dies allerdings tatsächlich eine "Primärintuition" von Schülerinnen und Schülern des 8. Schuljahres ist, sei hier offengelassen. Immerhin wird die - bekanntlich keineswegs triviale - Vorstellung der Newtonschen Mechanik vorausgesetzt; neue Verständnisschierigkeiten könnten gerade darurch erzeugt werden.

Desgleichen findet sich nur in LS-83 als Aufgabe die Spezialisierung der bekannten Papierstreifenkonstruktionen der Ellipse auf den Fall des Kreises. Dies ist ebenfalls als Bemühen anzusehen, materielle Repräsentationen geometrischer Figuren einzubringen. Sog. Anwendungsaufgaben in LS-69 kommen im Buch später, beschränken sich allerdings auf Peil- und Vermessungsprobleme.

LS-95 hält sich hinsichtlich der Begriffsbildung „Tangente" vollständig zurück. Ein Anwendungsbezug wird lediglich durch eine nicht weiter kommentierte Zeichnung der geometrischen Verhältnisse von Halbschatten und Kernschatten bei einer Mondfinsternis hergestellt. Zusammenfassend halten wir fest:

Tendenz von LS-69 zu LS-83: Es werden mehr Aspekte, auch physikalische, von Kreis und Tangente eingebracht, um eine breite Begriffsbildung anzuregen.

b) Sozusagen gegenläufig zu dieser Tendenz enthält LS-69 die Folge von Figuren, die die Tangenten als Grenzfälle von Sekantenscharen zeigen. Diese anspruchsvolle Idee des "funktionalen Zusammenhangs" scheint zunächst in LS-83 zu fehlen. Tatsächlich aber kommt sie in der nachfolgenden Aufgabe 10 zum Zuge: Wo liegen die Mittelpunkt aller Sehnen eines Kreises, die durch einen gegebenen Punkt P gehen? Freilich ist dies auch die Aufgabe 26 in LS-69. Dort aber ist durch die vorausgehenden Bilder im Schulbuch lediglich eine Interpretation gefordert, während LS-83 die Möglichkeit offen hält, die ganze Thematik anhand dieser Aufgabe überhaupt aufzubauen oder im Nachhinein zu reflektieren.

Allerdings ist hier zu fragen: Wird diese Möglichkeit im konkreten Unterricht tatsächlich so genutzt? Wird insbesondere die genannte Aufgabe zu einer "Entdeckung", oder doch wenigstens Einordnung der Thaleskreiskonstruktion der Tangenten eingesetzt? In LS-95 sind die Aufgaben zu den Tangenten meist nur „statischer" Natur. Offen einsetzbare Aufgaben fehlen, bzw. es bleibt dem Untrreicht selbst überlassen, wie z.B. die Zeichnung der Mondfinsternis tatsächlich ausgenutzt wird. Wir interpretieren dies alles so:

Tendenz von LS-69 zu LS-83: Es wird mehr Vertrauen in die Möglichkeit zur selbsttätigen Erarbeitung des Stoffes durch die Lernenden gesetzt, indem offene Aufgaben eingestreut werden.

c) Schließlich fällt die Art der jeweils verwendeten Sprache auf. LS-69 bemüht sich sehr um eine nahe an der Fachsprache liegende Ausdrucksweise. Der Text ist ausführlicher, detaillierter anspruchsvoller, vielleicht deswegen auch gestelzter, im sprachlichen Aufbau. Beispiel hierfür:

In LS-69: Eine Gerade schneidet, berührt, meidet einen Kreis mit Radius r, je nachdem ihr Abstand vom Kreismittelpunkt kleiner, gleich, größer als r ist.

In LS-83: Ein Kreis und eine Gerade können 0, 1 oder 2 Punkte gemeinsam haben, andere Möglichkeiten gibt es nicht.

In LS-95 wird wegen des Auseinanderreißens der Thematik eine solche zusammenfassende Beschreibung nicht gegeben. Die vorkommenden Texte sind in möglichst einfacher natürlicher Sprache gehalten.

LS-83 und LS-95 formulieren also möglichst so, wie es der Alltagssprache entsprechen könnte. Es werden auch nur die wichtigsten Grundtatsachen wirklich sprachlich fixiert. Man mag dies als Freiraum für die Lehrenden sehen, dann wenn sie es angebracht halten, darüber hinauszugehen und eigene Schwerpunkte zu setzen. Aber wieder: In welchem Maße solche Freiräume tatsächlich genutzt werden, muß dahingestellt bleiben. Hier halten wir fest:

Tendenz von LS-69 über LS-83 zu LS-95: Nur mehr die grundlegenden Tatsachen werden in einer bemüht einfachen Sprache festgehalten.

Die drei genannten Tendenzen könnte man insgesamt kennzeichnen als den Versuch, den Aspektereichtum der Geometrie und - nicht unverbunden damit - die Notwendigkeit, Lernen offen für Eigentätigkeiten zu gestalten, anzuerkennen und, soweit überhaupt möglich, auch in Lehrtexten umzusetzen. Die gemachten Einwände - Was geschieht wirklich mit den in Lehrbüchern angelegten Vorstellungen im Unterricht? - bleiben bestehen. Zusätzlich dazu ist zur Gestaltung von LS-95 anzumerken: Ist die Abkehr von der Behandlung eines geschlossenen Themas zugunsten des Herstellens nur lokaler Zusammenhänge tatsächlich ein Beitrag zur „Erhöhung der Komplexität"? Komplexität ist ja nicht Beliebigkeit, sondern kennzeichnet gerade das Wechselspiel zwischen Systematik und lokaler Assoziation.

„Tendenzen" in der Geometriedidaktik sind also durchaus uneinheitlich, jedenfalls soweit wir sie an einzelnen Beispielen beobachten können. Es muß also im nächsten Abschnitt eine umfassendere Perspektive gefunden werden.

3. Änderungen im Großen: Von Einzelproblematiken zur Systemdiskussion...

3.1 ... hinsichtlich der fachlichen Grundlegung

Lange vor dem Höhepunkt der eigentlichen "new math"-Welle hat man sich intensive Gedanken gemacht, auf welcher fachlichen Grundlage Geometrie in der Schule stehen soll. Man denke z.B. an die Bemühungen von E. Sperner (SPERNER 1959), einen für die Schule brauchbaren Aufbau der Geometrie mittels des Begriffs der Kongruenzabbildung zu finden. Daß nach dem Eindringen moderner strukturmathematischer Denkweisen in den Mathematikunterricht nach wie vor die Suche nach einer geeigneten Hintergrundtheorie für die Schule betrieben wurde, ist daher leicht zu verstehen. So schreibt z.B. Holland im Vorwort seines seinerzeit weit verbreiteten Buches "Geometrie für Lehrer und Studenten" (HOLLAND 1974/77), dieses Buch habe das Ziel, die Leser mit einer

> lückenlosen Darstellung der euklidischen Geometrie der Ebene vertraut zu machen, die unter schuldidaktischen Gesichtspunkten konzipiert ist und deshalb dem Lehrer als 'Hintergrundstheorie' für seinen Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I dienen kann. (HOLLAND 1974/77, I, S. 7)

Auch wenn Holland ausdrücklich darauf aufmerksam macht, daß „ein deduktiver Aufbau der Geometrie für den Geometrieunterricht in der Schule weder möglich noch sinnvoll ist" (I, S. 9), so sind doch die angegebenen "Didaktischen Ergänzungen" ganz darauf bezogen, welche mathematisch-begrifflichen Inhalte bei den Schülerinnen und Schülern auszubilden seien, und nicht etwa den Fragen der Anbindung, Genese, Rekonstruktion dieser Begriffe beim Lernen gewidmet. Im Vordergrund steht also der Aspekt, die globale logische Ordnung der Geometrie herauszuarbeiten. Dementsprechend sind auch die von Holland formulierten Lernziele eigentlich eine Fixierung von Wissenselementen. Um es wieder an unserem Beispielfeld 'Kreis und Tangente' zu zeigen, so werden hier u.a. folgende Lernziele genannt:

> (2) Die Schnittpunktbeziehungen eines Kreises mit einer Geraden diskutieren können. Notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angeben können, daß Gerade und Kreis, keinen, genau einen, zwei gemeinsame Punkte besitzen.
>
> (3) Die Begriffe Tangente, Sekante und Passante kennen und definieren können.
>
> (4) Zu gegebenem Berührpunkt die Tangente an einen Kreis konstruieren und die Richtigkeit der Konstruktion begründen können. (HOLLAND 1974/77, I, S. 134)

Didaktische Reflexionen umfassenderer Art sind somit in diesem Ansatz nur implizit angesprochen, sie sind sozusagen in der Auswahl und der Reihenfolge der dem Unterricht zugrundegelgten Axiome verborgen.

Daß die theoretische Formulierung der Geometrie auch radikal inhaltlich orientiert erfolgen kann, nämlich nach dem Dinglerschen Programm über die Möglichkeit der operativen Interpretierbarkeit der grundlegenden Axiome, haben in Hinblick auf didaktische Anwendung BENDER&SCHREIBER (1985) dargestellt. Unser bisheriges Beispiel der Kreistangente erscheint hier nun im Zusammenhang mit dem Phänomen des Berührens überhaupt, also in Form von Tangentialebenen beim Schleifen von Kugeln, Kugellagern usw.. Geometrische Begriffsbildungen sollen also zugleich so gesehen werden, daß sie zu bestimmten Zwecken - des täglichen Lebens, der Technik und des Handwerks, der Kunst, ... - gebildet werden. Sie müssen somit einen bestimmten Sinn haben, der sich letztlich von den grundlegenden Sinngebungen der Geometrie herleitet: Dem Bereich des Erlebens (anschauliches Erfassen) und dem Bereich des Handelns (praktisches Gestalten).

Auch wenn - jedenfalls in Dinglers Absicht - nach wie vor der Aufbau einer mathematischen Theorie als Ziel fortbesteht, so ist doch festzuhalten, daß bei dieser Art von Beschreibung des theoretischen Hintergrunds der Geometrie von vorneherein eine Komplexität der geometrischen Begriffe und Sätze ins Spiel gebracht wird, die bei einer nur formal orientierten Theorie eher auszublenden versucht wird.

Unsere Grundthese, daß die Aufeinanderfolge von geometriedidaktischen Entwicklungen einem Trend zur bewußten Suche nach Einbeziehung und Anerkennung weiterer Zusammenhänge folgt, bestätigt sich also bei Betrachtung dieser beiden Ansätze, die mathematischen Hintergründe der (Schul-) Geometrie zu beschreiben. Freilich ist dies eine nachträgliche Interpretation eines zeitlichen Ablaufs, dem keineswegs eine inhaltliche Absicht der beteiligten Autoren zugrunde liegen muß (aber kann!).

3.2. ... hinsichtlich der allgemeinbildenden Aufgabe des Geometrieunterrichts

Ohne hier die neuerdings wieder verstärkte Diskussion und die Beziehungen zwischen Allgemeinbildung und Mathematikunterricht im einzelnen nachzeichnen zu können, ist festzustellen, daß diese Diskussionen zu einer Berücksichtigung der Vielschichtigkeit des Allgemeinbildungsbegriffs und dem Aufzeigen der Breite von Ansatzmöglichkeiten im Mathematikunterricht führten (HEYMANN 1996; GRAUMANN 1993 mit Beispielen aus der Geometrie). Es sollen hier vier speziellere Ansätze skizziert werden. Diese passen durchaus unter den Oberbegriff der Entwicklung allgemeiner Bildung, weil jeweils versucht wird, die Geometrie so zu erschließen, daß durch den Unterricht ihr allgemeiner, über das eng Fachspezifische hinausgehender Ideengehalt herausgehoben wird.

a) Im Gefolge der Lernpsychologie J. S. Bruners hat sich ein mathematikdidaktischer Diskussionsstrang über die *fundamentalen Ideen der Mathematik* entwickelt; seine zeitliche Spannweite reicht von z.B. SCHREIBER (1979) bis z.B. SCHWEIGER (1992). P. Bender hat diese Diskussion auf die Geometrie bezogen (vgl. BENDER 1983). Grundlegend sind für ihn die Idee des Raumes und des starren Körpers, ohne die überhaupt keine Geometrie möglich wäre. Die Ideen des Passens und die Idee der Abbildung fungieren sodann als Kerne, um die sich weitere Ideen (Symmetrie, Homogenität, Kontinuität, ...) gruppieren. Wichtig für unsere These ist, daß das Konzept der fundamentalen Ideen, nach SCHREIBER (1983), an den Bedingungen der Weite (daß es sich also im logischen Status nicht um einzelne Begriffe handelt), der Fülle (daß der Idee also eine breite Anwendbarkeit in verschiedenen Gebieten der Mathematik zukommt) und des Sinnes (daß die Idee auch lebensweltlich verankert ist) zu messen ist. Aus diesem Konzept heraus kann man dann versuchen, zu einer Beschreibung der Relevanz verschiedener geometrischer Inhalte z.B. für bestimmte Absichten in der Schule zu kommen. Nahezu selbsterklärend ist, daß dieses Konzept nach den Einseitigkeiten der "new math"-Periode eine Öffnung der Perspektiven darstellt.

b) Eine Konzentration auf grundlegende Ideen der Geometrie wird besonders dringlich, wenn die Rolle der *Geometrie im Primarstufenunterricht* bestimmt werden soll. Dann ist insbesondere der Aspekt der Verankerung der Geometrie in der Umwelt der Kinder zu beachten, um zu verhindern, daß "in der Alltagspraxis der Grundschulen geometrische Themen eher als Unterhaltung, denn als 'richtige Mathematik' geschätzt" werden (BAUERSFELD 1992). In der Tat sind die Begründungen für die Einbeziehung der Geometrie in den Grundschulunterricht und die Vorschläge, wie dies zu realisieren sei, von einer bemerkenswerten Grundsätzlichkeit. Anders als hinsichtlich der strukturellen Orientierung des Arithmetikunterrichts (Mengensprache, aussagenlogische Übungen u.ä.) in der "new math"-Periode, die nahezu ohne Spuren zu hinterlassen wieder aufgegeben wurde, scheint sich der Geometrieunterricht in der Grundschule auf der seinerzeit gelegten Basis zu etablieren. Jedenfalls sind die z.B. von BAUERSFELD (1967) und WINTER (1976) gegebenen Begründungen nach wie vor bedenkenswert und werden in der neueren Didaktik (z.B. im Handbuch RADATZ & RICKMEYER 1991) wieder aufgenommen. Es liegt wohl - hier wieder unsere nachträgliche Interpretation - an der hier von vorneherein herausgearbeiteten Breite der Ansätze. Als Beispiele zitieren wir sinngemäß einige der Leitgedanken bei RADATZ & RICKMEYER (1991) und BAUERSFELD (1992):

- geometrische Inhalte fördern grundlegende kognitive Kompetenzen,
- geometrische Inhalte erlauben das Entwickeln spezifischer mathematischer Denkweisen,
- Geometrie trägt Unverzichtbares zur Umwelterschließung bei,
- arithmetische Begriffe werden in engem Zusammenhang mit geometrischen Begriffen ausgebildet.

Alle diese, im einzelnen auszudifferenzierenden Argumentationslinien zeichnen sich durch ihren Gehalt an Ideen allgemeiner Ausbildung aus. Keines der Argumente ist nur auf die Mathematik, keines nur auf die Lernpsychologie, keines nur auf unterrichtsmethodische Fragen beschränkt; vielmehr sind es jeweils auf systematische Zusammenhänge bezogene Überlegungen. Übrigens kann man nun unser Standardbeispiel Kreis und Tangente mit weiteren Aspekten versehen: Für Grundschulkinder kommt der Kreis im Zusammenhang mit dem Einüben des Gebrauchs des Zirkels vor. Verwendet man Tangenten bzw. auch sich berührende Kreise, dann entstehen besonders schöne, ästhetisch reizvolle Figuren.

c) Öffnung der Perspektiven ist in der Geometriedidaktik auch zu beobachten im innermathematischen Verständnis der Rolle der Geometrie (der Sekundarstufe I). B. Artmann hat in Vorträgen und in seiner Vorlesung über Elementargeometrie (ARTMANN 1978) den programmatischen Titel *"Geometrie als Vorbild für Mathematik"* geprägt. Diesem Ansatz liegt der folgende Gedankengang zugrunde: Nahezu alle typischen mathematischen Arbeitsweisen kommen in der Elementargeometrie einigermaßen unverfälscht und mit substantiellem Inhalt vor. Dies ist in keinem anderen Gebiet der Schulmathematik in solchem Ausmaß der Fall. Und darin liegt der eigentliche Wert der Elementargeometrie als Schulfach.

Natürlich sind diese Thesen auszuführen, etwa dadurch, daß versucht wird, typische Arbeitsweisen der Mathematik aufzulisten und in Beziehung zu setzen zu Inhalten und Vorgehensweisen der Elementargeometrie (NEUBRAND 1991), oder indem einzelne Beispiele elementargeometrischen Inhalts untersucht werden, inwieweit in ihnen mathematische Denkweisen gültig zum Ausdruck kommen (vgl. z.B. NEUBRAND 1981 und 1997; ARTMANN 1994). Dieser Ansatz, der also sehr stark auf Mathematik als Tätigkeit gegenüber einer "fertigen Mathematik" konzentriert ist, führt von selbst zu einer offeneren Sichtweise auf Geometrie. Tätigkeiten beinhalten ja immer mehr als die Ergebnisse, nämlich die Fragen des Sinns im Voraus und die reflektierende Betrachtung im Nachhinein.

d) Es gehört zu den Leistungen der Neudefinition der allgemeinbildenden Funktion des Mathematikunterrichts durch HEYMANN (1996), daß eine enge Verzahnung zwischen Allgemeinbildung und Anwendungen gesehen wird - ganz gegen den neuhumanistischen, geradezu anwendungsfeindlichen Bildungsbegriff. Die *Anwendungsproblematik der Geometrie* kann also gut unter der jetzigen Perspektive eingeordnet werden. Auch hier haben sich durchaus Wandlungen mit dem Ziel einer komplexeren Sichtweise gegeben:

Zunächst legt die Bezeichnung "Anwenden" nahe, die didaktischen Funktionen von Anwendungsbezügen im Mathematikunterricht in erster Linie im Motivieren der Schülerinnen und Schüler und im Umsetzen mathematischer Resultate auf außermathematische Gegebenheiten zu sehen (vgl. dazu z.B. PROFKE 1985 mit vielen interessanten Beispielen von Anwendungen geometrischer Begriffe in Umwelt, Technik, Naturwissenschaften, usw.). Mathematische Anwendungen jedoch ausschließlich unter dem Gesichtspunkt zu betrachten, daß mathematische Begriffe sozusagen nachträglich in Anwendungssituationen benutzt werden, ist eine verengte Sichtweise. Die Spannung zwischen theoretischem Konzept und der tatsächlichen Anwendung wird dann nämlich ausgeblendet; man denke etwa an die Rolle von Gedankenexperimenten, an die Widerlegungskraft empirischer Daten, um ein umfassenderes Bild vom Stellenwert mathematischen Anwendungsbezugs zu erhalten. Der Anwendungsbezug mathematischer und - in besonderer Schärfe, weil die Gegenstände ja von vorneherein meist umweltbezogen vorliegen - geometrischer Begriffe wird daher in neueren didaktischen Arbeiten nicht mehr nur als etwas zur Mathematik Hinzukommendes gesehen, sondern gilt als substantiell und konstitutionell für den Aufbau mathematischer Theorien. An drei Ausprägungen im Hinblick auf didaktische Überlegungen kann diese Erweiterung der Perspektive deutlich gemacht werden:

- In H. Winters Aufsatz über "Geometrie vom Hebelgesetz aus" (WINTER 1978) dient das Hebelgesetz als eine physikalische Urintuition, die - selbst wenn sie noch gar nicht auf die formale Ebene gebracht wurde - über physikalisch naheliegende Operationen zu wichtigen geometrischen Einsichten, ja sogar zu geometrischen Sätzen, führt. Wir nehmen zur Illustration daraus den Satz, daß sich die Seitenhalbierenden eines Dreiecks in einem Punkt, dem Schwerpunkt, schneiden. Die physikalische (!) Suche nach dem Schwerpunkt führt durch Gedankenexperimente - Verschieben, Aufteilen, Zusammenlegen, Ausbalancieren von Massen - zwangsläufig zu diesem geometrischen Satz, sogar präziser zum Teilverhältnis 2:1 des Schwerpunkts auf der Seitenhalbierenden. Erst im Nachschritt, in der Reflexion wird dann deutlich zu machen sein, auf welchen theoretisch-geometrischen Grundlagen diese Sätze beruhen. Die Anwendung geht hier also dem mathematischen Satz voraus und liefert sozusagen die Bewährungsnorm, die an die mathematische Theorie zu stellen ist.

Es ist im Grunde eine erst in jüngerer Zeit in die Mathematikdidaktik eingegangene wissenschaftstheoretische Position, die derartige Zugänge ermöglicht. Und zwar ist, insbesondere durch JAHNKE (1978), der Ideen von Sneed aufgriff, gezeigt worden, wie relevant es für mathematikdidaktische Zwecke, also zur Untersuchung der Möglichkeiten der Entwicklung mathematischen Wissens, ist, von einer wissenschaftlichen Theorie nicht nur den "theoretischen

Kern", sondern auch das Feld der "intendierten Anwendungen" in den Blick zu nehmen; dies erst schafft die, insbesondere für das Begründen innerhalb von Lernprozessen, notwendigen Intuitionen. Daß diese Auffassung auch das Beweisen unter didaktischen Gesichtspunkten neu bewerten läßt, haben HANNA & JAHNKE (1993) herausgearbeitet.

- Auf die konstruktive Bedeutung von Anwendungen hat KRAINER (1990) bei Untersuchungen am Winkelbegriff hingewiesen. Auch hier geht es gerade nicht um nachträgliches Anwenden im Sinne eines Überstülpens mathematischer Begrifflichkeit über die Realität, sondern gewissermaßen umgekehrt, um das Herauslösen angepaßter Begriffe zur Strukturierung einer facettenreichen Umwelt. Anwendungen dienen also nicht ausschließlich dem "Schmackhaftmachen" des einen oder anderen Begriffs, sondern konstituieren diesen erst in einem komplexen Lernprozeß. Auch hier wurde dieser Zugang in einer derartigen Breite erst möglich durch in neuerer Zeit in die Mathematikdidaktik aufgenomme Ideen. Und zwar kann man Krainers Untersuchungen wohl schon beeinflußt sehen von konstruktivistischen Ideen, die unsere Vorstellungen vom Lernen verändert haben in Richtung auf eine zunehmende Betonung von Eigentätigkeit, Vernetzung und konstruktivem Aufbau von Begriffen.

- Schließlich kann man überhaupt die stoffliche Vielfalt beschreiben, in der sich "Elementargeometrie und Wirklichkeit" durchdringen. Dies ist bei WITTMANN 1987 in extenso dargestellt.

3.3. ...hinsichtlich des Verständnisses von Lernprozessen

Idealtypisch kann man zwei grundlegend verschiedene Auffassungen über Mathematikdidaktik ausmachen, insoweit sie versucht, Aussagen über eine erfolgreiche Gestaltung von Lehr-Lern-Prozessen zu machen. Die eine Denkrichtung arbeitet daraufhin, daß das Lernen von Mathematik durch immer sorgfältigere Detailplanung der Unterrichtsabläufe sozusagen optimiert werden kann; eine besonders scharfe Ausprägung dieser Sichtweise findet sich in den älteren Untersuchungen über programmiertes Lernen, jedoch auch in manchen Lehrerhandbüchern. Die andere Denkrichtung hingegen hebt ab auf die Notwendigkeit, beim Lernen die unterschiedlichen Voraussetzungen der Lernenden, verschiedenartige Kontexte, die Fragen nach dem jeweils subjektiv zu bestimmenden Sinn mathematischer Gegenstände mit einzubeziehen; als markanten Wendepunkt zu dieser Denkrichtung hin kann man vielleicht FISCHER (1980) nennen. Es besteht kein Zweifel, daß die zweitgenannte Auffassung in den letzten Jahren deutlich hinzugewonnen hat, vielleicht sogar jetzt als die vorherrschende Meinung, jedenfalls der "normativ-konstruktiv" vorgehenden Mathematikdidaktik gelten kann.

Die Geometrie hatte jedoch von jeher ein Feld, in dem die Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler durch seinen Problemlösecharakter besonders gefragt war, nämlich die sogenannten Konstruktionsaufgaben. Freilich erschienen diese in der schier endlosen Folge von Dreiecks-konstruktionen eher als spezielle Anforderungen in dem speziellen Kapitel der Dreiecksgeometrie. HOLLAND (1974) hat jedoch herausgearbeitet, daß Konstruktionsaufgaben eine durchaus größere Bedeutung zukommt, nämlich daß sie zur Einführung neuer Begriffe zur Hinführung zu und zur Motivation von geometrischen Sätzen, ja vielfach sogar zum Beweis von Sätzen dienen können. Auch zeigt Holland den Bezug dieses Teils der Geometrie zur algorithmischen Mathematik auf.

Gerade von Konstruktionsaufgaben kann man erwarten, daß sie zu einer bewußten mathematischen Arbeitshaltung beitragen; die diesbezügliche Struktur solcher Aufgaben, die ja eigentlich "klassisch" ist - Analyse, Konstruktion, Determination -, kann nämlich als Anhaltspunkt für eine entsprechende Reflexion dienen. FRAEDRICH (1979) hat - im Anschluß an gestaltpsychologische Untersuchungen - gezeigt, daß geometrische Aufgaben gut einsetzbar sind, um an heuristische Denkweisen heranzuführen. In den beiden genannten Arbeiten ist somit bereits ein erster Schritt getan, um individuelle Denkprozessen in der Geometrie mathematikdidaktisch zu betrachten. Dies geschieht freilich noch ganz unter der - unausgesprochenen - Annahme, sozusagen vollständig inhaltsunabhängige und insbesondere intersubjektive Gesetze des produktiven Denkens aufstellen zu können.

Inzwischen hat sich allerdings der Schwerpunkt der Diskussionen weiter verschoben. Zunächst sind durch die Untersuchungen von Bauersfeld, Voigt u.a. fundamentale Unterschiede im Wissen und Lernen von Kindern im Vergleich zum Wissen und zur Darstellung von Wissen in der Mathematik herausgearbeitet worden. Beim Lernen herrscht nicht nur eine extreme Kontextgebundenheit und Bereichsspezifität vor; Bedeutungen und die Konstruktion von Sinnzusammenhängen sind darüber hinaus sowohl hochgradig subjektiver Natur, als auch von der sozialen Einbindung in Klassenverbände, in die Schüler-Lehrer-Interaktion usw. abhängig. Unter dieser Sichtweise zerfällt dann auch die Geometrie - aus Schülersicht betrachtet - in eine Reihe unterschiedlicher, getrennter Erfahrungsbereiche. So hat z.B. ANDELFINGER (1988) versucht, in "Landkarten" die unterschiedlichen Bilder, die sich die Lehrenden und die Lernenden von der Geometrie machen, darzustellen. Keineswegs sind diese "Landkarten" deckungsgleich, allerdings auch nicht ohne gegenseitige Beeinflussung. Während es für die Lehrenden noch einen durchgehenden Bezug von der geometrischen Propädeutik zur konstruktiven und beweisenden Geometrie gibt, zerfällt das Schülerbild in einige getrennte Bereiche, etwa "Bastel-Geo" am Anfang, "Beweis-Geo" mit als von außen kommend empfundenen Anforderungen im Laufe des Fortgangs des Geometrie-Kurses.

Dies sind allerdings keine Inkongruenzen, die etwa nur durch fehlende Reife, mangelnde Einsicht u.ä. der Schülerinnen und Schüler bedingt wären. Vielmehr kommen in solchen Unterschieden grundsätzliche Probleme zum Ausdruck. Schülerinnen und Schüler erfahren, grundgelegt durch das Schulbuch und die daraus resultierende Unterrichtsmethodik, wie STRUVE (1990) gezeigt hat, Geometrie als sog. empirische Theorie, betrachten also geometrische Aussagen als gewissermaßen physikalische Resultate über eine reale Welt. Dies ist auch durchaus so gewünscht, sinnvoll und zum Einstieg in geometrisches Denken wohl unverzichtbar. Für die Geometrie scheint es nämlich charakteristisch zu sein, daß empirische und formale Aspekte aufeinander angewiesen sind; vgl. auch das diesem Vortrag vorangestellte Motto.

Es ist von dieser Erkenntnis der Spannung zwischen der empirischen und der formal-axiomatischen Auffassung von Geometrie dann aber gut erklärbar, daß es zwangsläufig Friktionen im Verständnis der geometrischen Themen im Unterricht geben muß, wenn zwischen diesen beiden Theoriearten gewechselt wird. Es handelt sich ja jeweils um Theorien ganz unterschiedlichen Status. Wir können es wieder an unserem Standardbeispiel "Kreis und Tangente" sehen. Im oben zitierten Schulbuch von Lambacher-Schweizer LS-83 sind einerseits physikalische Beobachtungen abgerufen (Hammerwerfer), die in der fraglichen Klassenstufe wohl kaum einer theoretischen Erklärung zugänglich sein dürften, sondern auf rein phänomenologischer Basis bleiben müssen; andererseits wird dann aber verlangt, daß man die Tangente mit Zirkel und Lineal nach festen Regeln konstruieren muß und die experimentelle Methode, das Lineal einfach an den Kreis heranzuschieben, als nicht gültig zu betrachten ist. Zweifelsohne wird von den Schülerinnen und Schülern hier ein qualitatives Umdenken verlangt, wozu der Unterricht freilich die adäquaten Begründungen liefern muß.

Auch in diesem Bereich der geometriedidaktischen Untersuchungen erkennen wir wieder den Trend, die verschiedenen Einflüsse auf den Geometrieunterricht - mathematisch, psychologisch, epistemologisch - zu einem komplexen Gesamtbild zu verknüpfen. Freilich sollte durchaus angemerkt werden, daß konkrete Untersuchungen zur Kommunikationsstruktur im Unterricht bisher eher selten an geometrischen Themen vorgenommen wurden; es mag dafür den einfachen Grund geben, daß Geometrie auf visuelle Kommunikation angewiesen ist, die sich nur schwer schriftlich dokumentieren läßt.

4. Ein Beispiel: Der "open-ended approach“ im japanischen Mathematikunterricht

Beispiele anzugeben, die den Trend der Öffnung der Perspektiven in der Geometriedidaktik belegen, mag unmöglich sein. Niemals kann nämlich ein einzelnes Beispiel allen Aspekteverbreiterungen gerecht werden; schließlich ist es ja immer noch der Inhalt, der seinen eigenen Wert hat und die Art der eingenommenen Sichtweisen entscheidend mitbestimmt. Ein Beispiel kann aber die allgemeine Haltung zeigen, an geometrische Stoffe so heranzugehen, daß eine Vielfalt von Bedeutungen, Aspekten, Tätigkeiten,... zum Ausdruck kommen kann.

Gewissermaßen „in a nutshell“ kann man diese Art von geometriedidaktischem Herangehen in einem Konzept beobachten, das in Japan - nicht nur dort, aber dort in einer sehr spezifischen Weise; vgl. ZDM-Heft 91/2, darin NOHDA (1991) sowie BECKER (1992) - besonders konkret durchdacht zu sein scheint. Es ist der sog. „open-ended approach“, dessen Grundidee darin besteht, den Schülerinnen und Schülern sorgfältig ausgewählte Aufgaben zu präsentieren, die nicht von vorneherein auf die eine normierte Lösung zustreben, sondern Raum lassen für Eigentätigkeit, Verknüpfungen zu anderen mathematischen Gegenständen, Kreativität und Reflexion. Hinzu kommt als besonderes Charakteristikum, daß die individuelle Bearbeitung solcher Aufgaben auch in die Bewertung einbezogen wird, indem unterschiedliche Lösungen mit unterschiedlichen Wertigkeiten belegt werden.

Allerdings ist die Übernahme solcher Aufgaben in unsere Tradition nicht möglich, wenn nicht zuvor die erforderlichen Haltungen - aktives Verhalten der Lernenden, keine Diskreditierung von probierenden ad-hoc-Verfahren, geänderte Erwartungen der Schülerinnen und Schüler an die Rolle der Lehrenden, Vertrauen auf das eigene Tun, usw. - geklärt werden. Darüberhinaus gibt es eine Reihe von Bedingungen, die für die Brauchbarkeit von Aufgaben für den „open ended approach" einzuhalten sind (vgl. BECKER & SHIMADA 1997). Solche Bedingungen sind etwa:

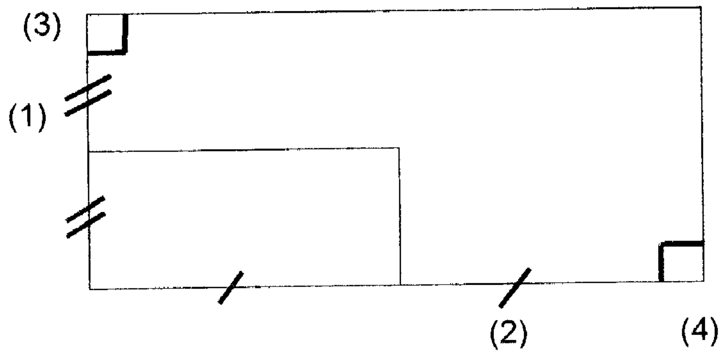
- Die Aufgabe muß eine Bedeutung im weiteren Kurs haben, sie muß also „wichtig" und substantiell sein.
- Bei geometrischen Aufgaben darf die vorgelegte Figur nicht zu einfach, aber auch nicht zu kompliziert sein. (Im folgenden Beispiel wäre ein Quadrat eine zu einfache, ein Dreieck oder ein allgemeines Viereck eine zu komplizierte, weil zu variantenreiche Ausgangsfigur.)
- Über die verschiedenen Methoden muß gesprochen werden (können).
- Gruppen- oder Einzelarbeit ist je nach Problem, je nach Lage in der Klasse auszuwählen.

Aufgaben im „open-ended approach" müssen nicht trickreiche Problemlöseaufgaben sein. Vielmehr können gerade einfache Fragestellungen, sobald sie nur vielfältige Lösungsmöglichkeiten herausfordern, die Basis sein. Ein derartiges Beispiel ist die folgende Aufgabe:

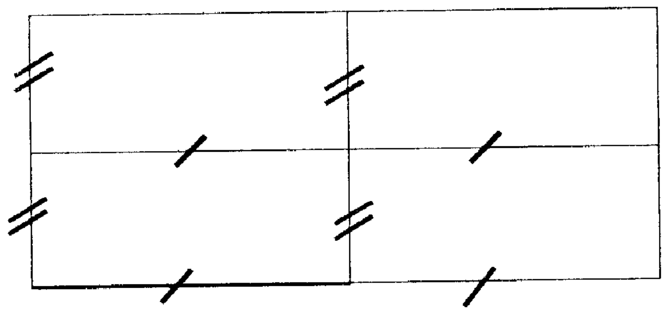
> Ein Rechteck soll auf die doppelten Seitenlängen vergrößert werden. Welche Zeichenmethoden kannst Du finden, um dies zu erreichen? Zeichne die gesuchte Figur auf möglichst viele Weisen! Beschreibe Deine Zeichenmethoden!
>
> (vgl. BECKER & SHIMADA 1997, pp 72ff)

Das scheint eine zunächst reichlich banal aussehende Aufgabe zu sein. Jedoch ist „das Ziel der Unterrichtseinheit (3 Stunden) nicht lediglich, den Schülern zu helfen, den Prozeß der Vergrößerung zu verstehen, sondern vielmehr zu entwickeln, wie man flexibel und auf verschiedenen Wegen über die Methoden des Zeichnens dieser Figur nachdenken kann" (BECKER & SHIMADA 1997, p. 72). Danach wird über 14 verschiedene Wege berichtet, die die Schülerinnen und Schüler verwendet haben, um das Problem zu lösen. Die zuerst genannten Methoden werden im folgenden gezeigt. Durch Ziffern, die die Reihenfolge der Schritte angeben, und leicht nachvollziehbare Symbole für die jeweilige Operation (fett) wird hier der bei BECKER&SHIMADA (1997) verbal beschriebene Lösungsgang angedeutet; oft wird ja ein bestimmter Lösungsweg erst dann verständlich, wenn man mit den Schülerinnen und Schülern, die ihn gefunden haben, darüber spricht.

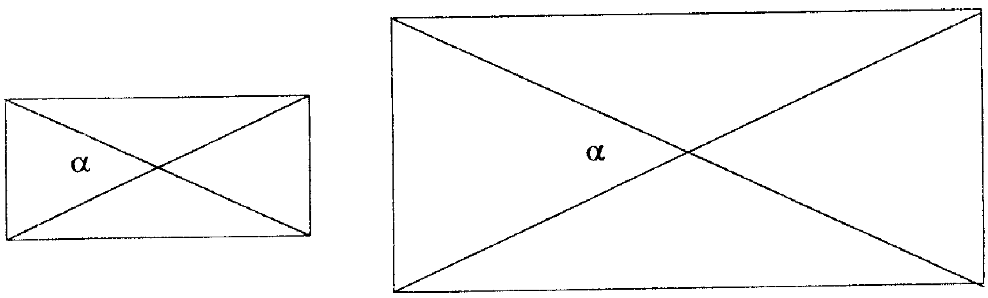
a) die Methode der Verlängerung zweier Seiten auf das Doppelte und anschließendes Zeichnen rechter Winkel:



b) Verlängerung von vier Seiten:



c) Vergrößerung unter Beibehaltung des Diagonalenwinkels α und Übernahme der ganzen Diagonalenlänge der kleinen Figur als halbe Diagonalenlänge in der großen Figur.



Man erkennt, daß eine solche scheinbar simple Aufgabe dann inhaltliches Gewicht erhält, wenn nun ein Vergleich zwischen den einzelnen Lösungen, deren Originalität sich im Verlauf der 14

Lösungen immer weiter steigert, vorgenommen wird. Eigentlich liegt erst im Vergleich mehrerer Lösungen, und sicher nicht bereits bei Vorstellen einer einzigen - für sich ja jeweils fast trivialen - Lösung „wirkliche" Mathematik. Ein solcher Vergleich eröffnet nun zweierlei, die Anerkennung der Kreativität der Schülerinnen und Schüler, aber zugleich auch die Möglichkeit, nun auf der Basis gemachter Erfahrungen das Konzept der Ähnlichkeitsabbildungen auf theoretische Weise weiter und vertieft anzugehen. Der „open-ended approach" erfüllt also unsere These von der laufenden Erhöhung der Komplexität der geometrischen Gegenstände, die wir als eine Grundtendenz neuerer Geometriedidaktik erkannt haben, in einer allerdings recht spezifischen Weise.

Literatur

ALEXANDROV, A.D. (1994). Geometry as an element of culture. In D.R. ROBITAILLE ET AL. (Eds.), *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 365-368). Sainte-Foy (Québec): Université Laval.

ANDELFINGER, B. (1988). *Geometrie - Didaktischer Informationsdienst Mathematik*. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung.

ARTMANN, B. (1978). *Vorlesung über Elementargeometrie, WS 1978/79* (Vorlesungsskript). Darmstadt: Technische Hochschule.

ARTMANN, B. (1994). Der Satz von Pythagoras als Paradigma für Mathematik. *Mathematik in der Schule 32*, 343-358.

BAUERSFELD, H. (1967). Die Grundlegung und Vorbereitung geometrischen Denkens in der Grundschule. In H. RUPRECHT (Hrsg.), *Erziehung zum produktiven Denken* (S. 40-54). Freiburg i.Br.: Herder.

BAUERSFELD, H. (1992). Drei Gründe, geometrisches Denken in der Grundschule zu fördern. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1992*, 7-33.

BECKER, J.P. (1992). Cross-national mathematics achievement results and observations conerning problem solving and creativity of American and Japanese students. *Journal für Mathematik-Didaktik 13*, 99-142

BECKER, J. & SHIMADA, SHIGERU (Eds.) (1997). *The Open-ended Approach - A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

BENDER, P. (1983). Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht in der Sekundarstufe I. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1983*, 8-17.

BENDER, P. & SCHREIBER, A. (1985). *Operative Genese der Geometrie* (Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Universität Klagenfurt, Band 12). Stuttgart: Teubner.

FISCHER, R. (1980). Zur Ideologie der Selbstbeschränkung im Mathematikstudium (mit kritischen Bemerkungen von K. BARNER). *Zeitschrift für Hochschuldidaktik (Wien), Sonderheft S3: Mathematikunterricht an Universitäten*, 32 - 72.

FRAEDRICH, A.M. (1979). Heuristisches Vorgehen bei geometrischen Beweisaufgaben am Beispiel der Höhenaufgabe von Duncker. Teile I, II und III. *Praxis der Mathematik 21*, 225-233, 264-273, 297-309.

GRAUMANN, G. (1993). Wodurch wirkt der Mathematikunterricht allgemeinbildend? - Vier Beispiele aus dem Geometrieunterricht. In Arbeitskreis Mathematik und Bildung (Hrsg.), *Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht* (S. 55 - 68). Buxheim, Eichstätt: Polygon.

GRAUMANN, G., HÖLZL, R., KRAINER, K., NEUBRAND, M. & STRUVE, H. (1996). Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre. *Journal für Mathematik-Didaktik 17*, 163 - 237

HANNA, G. & JAHNKE, H.N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics 24*, 421-438.

HEYMANN, H.W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim: Beltz.

HOLLAND, G. (1974/77). *Geometrie für Lehrer und Studenten* (Band 1 / Band 2). Hannover: Schroedel.

HOLLAND, G. (1974). Die Bedeutung von Konstruktionsaufgaben für den Geometrieunterricht. *Der Mathematikunterricht 20* (1), 71-86.

JAHNKE, H.N. (1978): *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik: Beweisen als didaktisches Problem* (IDM - Materialien und Studien, Band 10). Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität.

KRAINER, K (1990). *Lebendige Geometrie - Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs*. Frankfurt/Main usw.: Peter Lang.

NEUBRAND, M. (1981). Das Haus der Vierecke - Aspekte beim Finden mathematischer Begriffe. *Journal für Mathematik-Didaktik 2*, 37-50.

NEUBRAND, M. (1991). Elementargeometrie - Altmodisches Stoffgebiet oder Chance für einen lebendigen Mathematikunterricht? In E. STAMPE U.A. (Hrsg.), *Berliner Tagung zur Didaktik der Mathematik, Blossin, April 1991* (S. 120-130). Berlin: Freie und Technische Universität.

NEUBRAND, M. (1993). Zur stofflichen und didaktischen Vielfalt der Elementargeometrie. *Beiträge zum Mathematikunterricht 1993*, 287-290.

NEUBRAND, M. (1997). Definition - Satz - Beweis: Was kann daran allgemeinbildend sein? In: R. BIEHLER & H.N. JAHNKE (Hrsg.): *Mathematische Allgemeinbildung in der Kontroverse - Materialien eines Symposiums am 24.Juni 1996 am Zentrum für interdisziplinäre Forschung der Universität Bielefeld* (= IDM - Occasional Paper Nr. 193) (S. 13 - 26). Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld

NOHDA, N. (1991). Paradigm of the „open-approach" method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 23 (2)*, 32-37.

PROFKE, L. (1985). Anwendungsaufgaben im Mathematikunterricht - vorwiegend diskutiert am Geometrieunterricht der Sekundarstufe I. *Journal für Mathematik-Didaktik 6*, 15-44.

RADATZ, H. & RICKMEYER, K. (1991). *Handbuch für den Geometrieunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel.

SCHREIBER, A. (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken - Ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. *mathematica didactica 2*, 165-171.

SCHREIBER, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. *mathematica didactica 6*, 65-76.

SCHWEIGER, F. (1992). Fundamentale Ideen: Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematik-Didaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik 13*, 199-214.

SPERNER, E. (1959). Kongruenz und Bewegung. *Der Mathematikunterricht 5(3)*, 5-11.

STRUVE, H. (1990). *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim, Wien, Zürich: Bibliographisches Institut.

VILLANI, V. & AL. (Eds.) (1998): *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (= ICMI-Study Geometry). Dordrecht: Kluwer *(in print)*

VOLLRATH, H.-J. (1981). Geometrie im Mathematikunterricht - Eine Analyse neuerer Entwicklungen. In H.G. STEINER & B. WINKELMANN (Hrsg.), *Fragen des Geometrieunterrichts* (IDM-Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 1, S. 11-27). Köln: Aulis.

WINTER, H. (1976). Was soll Geometrie in der Grundschule? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 8*, 14-18.

WINTER, H. (1978). Geometrie vom Hebelgesetz aus - Ein Beispiel zur Integration von Physik- und Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. *Der Mathematikunterricht 24* (5), 88-125.

WITTMANN. E.CH. (1987). *Elementargeometrie und Wirklichkeit - Einführung in geometrisches Denken*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Prof. Dr. Michael Neubrand
Bildungswissenschaftliche Hochschule Flensburg - Universität
Mürwiker Straße 77, D-24943 Flensburg, Deutschland
neubrand@uni-flensburg.de